OPCIÓN A

A.1.-Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -8 & -3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Comprobar que **det(A^2) = (det(A))^2**

b) Estudiar si para cualquier matriz $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de orden 2 se cumple que

det(M^2) = (det(M))^2

c) Encontrar la relación entre los elementos de las matrices **M** cuadradas de orden 2 que satisfacen **det(M + I) = det(M) + det(I)**

$a)$

$$\left.\begin{cases} |A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -8 & -3\end{vmatrix}=-9+8=-1\Rightarrow |A|^2=(-1)^2=1\\ A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -8 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -8 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A^2|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\end{cases}\right.\Rightarrow Comprobado\Rightarrow |A|^2=|A^2|$$

$b)$

$$\begin{cases} |M|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\Rightarrow |M|^2=(ad-bc)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\\ M^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}\Rightarrow |M^2|=\begin{vmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{vmatrix}=(a^2+bc)(bc+d^2)-(a+d)^2bc\end{cases}$$

$$(a^2+bc)(bc+d^2)-(a+d)^2bc=a^2bc+a^2d^2+b^2c^2+bcd^2-a^2bc-d^2bc-2abcd=a^2d^2+b^2c^2-2abcd$$

$Se\ cumple\ para\ todas\ las\ matrices$

$c)$

$$\left.\begin{cases} M+I=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1 & b\\ c & d+1\end{pmatrix}\Rightarrow |M+I|=\begin{vmatrix}a+1 & b\\ c & d+1\end{vmatrix}=(a+1)(d+1)-bc\\ |M|+|I|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=ad-bc+1\end{cases}\right.\Rightarrow$$

$$(a+1)(d+1)-bc=ad-bc+1\Rightarrow ad+a+d+1-bc=ad-bc+1\Rightarrow a+d=0\Rightarrow d=-a$$

$$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

A.2.- Sea $\begin{cases} 3x+2 & x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & 0\le x<\pi \\ ax^2+b & x\ge 0 \end{cases}$

a) Estudiar los valores de **a** y **b** para los que la función **f(x)** es continua para todo valor de **x**

b) Determinar la derivada de **f(x)** en el intervalo $(0\ ,\ \pi)$

c) Calcular $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

$a)$

$$\begin{cases} 3x+2 & x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & 0\le x<\pi \\ ax^2+b & x\ge \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3.0+2=2 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0^2+2a.\cos 0=2a \end{cases} \Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\pi^2+2a.\cos\pi=\pi^2+2.1.(-1)=\pi^2-2 \\ f(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=1.\pi^2+b=\pi^2+b \end{cases} \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & x<0 \\ 2x-2\,sen(x) & 0\le x<\pi \\ 2x & x\ge\pi \end{cases}$$

$c)$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left[x^2+2\cos(x)\right]dx+\int_{\pi}^{2\pi}\left(x^2-2\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^{\pi}+2\left[sen\ x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{\pi}^{2\pi}-2.\left[x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^{2\pi}+2.(sen\ \pi-sen\ 0)-2.(2\pi-\pi)=\frac{1}{3}\cdot\left[(2\pi)^3-0^3\right]+2.(0-0)-2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{8}{3}\pi^3-2\pi$$

A.3.- .- Calcular un polinomio de tercer grado $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ que satisface:

I) p(0) = 5

II) Tiene un máximo en **x = 1** y un punto de inflexión en **x = 0**

III) $\int_0^1 p(x)\,dx=\frac{9}{4}$

$$\left\{\begin{array}{c} p(0)=a.0^3+b.0^2+c.0+d=5\Rightarrow d=5 \\ p'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow p'(1)=3a.1^2+2b.1+c=0\Rightarrow 3a+2b+c=0 \\ p''(x)=6ax+2b\Rightarrow p''(0)=6a.0+2b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow b=0 \\ \int_0^1\left(ax^3+cx+5\right)dx=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}\cdot a\left(1^4-0^4\right)+\frac{1}{2}\cdot c\left(1^2-0^2\right)+5(1-0)=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot c+5=\frac{9}{4} \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} 3a+c=0 \\ \frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot c+5=\frac{9}{4} \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} 3a+c=0 \\ a+2c+20=9 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} 3a+c=0 \\ a+2c=-11 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} 3a+c=0 \\ -3a-6c=+33 \end{array}\right.\Rightarrow -5c=+33\Rightarrow$$

$$c=-\frac{33}{5}\Rightarrow 3a-\frac{33}{5}=0\Rightarrow a=\frac{33}{15}\Rightarrow p(x)=\frac{33}{15}x^3-\frac{33}{5}x+5$$

A.4.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ $\quad s \equiv x = y+4 = 2z-8$

a) Comprobar que se cortan

b) Hallar el ángulo que forman

$$\left\{\begin{array}{l} x=-4+z \Rightarrow -4+z+y+z=0 \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-4+\lambda\\ y=4-2\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \\ \qquad\qquad s\equiv\begin{cases}x=\mu\\ y=-4+\mu\\ z=4+\dfrac{\mu}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}-4+\lambda=\mu\\ 4-2\lambda=-4+\mu\\ \lambda=4+\dfrac{\mu}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda-\mu=4\\ 2\lambda+\mu=8\\ 2\lambda-\mu=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda-\mu=4\\ 2\lambda+\mu=8\end{cases} \Rightarrow$$

$$3\lambda=12 \Rightarrow \lambda=4 \Rightarrow 4-\mu=4 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow 2.4-0=8 \Rightarrow$$

$$2\lambda-\mu=8 \Rightarrow 2.4-0=8 \Rightarrow 8=8 \Rightarrow Se\ cortan\ en\ A\begin{cases}x=-4+4=0\\ y=4-2.4=-4\\ z=4\end{cases} \Rightarrow A(0\,,-4\,,4)$$

$b)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(1\,,-2\,,1)\\ \overrightarrow{v_s}=\left(1\,,1\,,\dfrac{1}{2}\right)\equiv(2\,,2\,,1)\end{cases} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}.\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|.\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left|(1\,,-2\,,1)\cdot(2\,,2\,,1)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|2-4+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{|-1|}{3\sqrt{6}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{1}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{18} \Rightarrow ang\left(\overrightarrow{v_r}\,,\overrightarrow{v_s}\right)=arc\cos\frac{\sqrt{6}}{18}=82º10'44''$$

OPCIÓN B

B.1. Sean $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\0&0&\alpha\\0&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Estudiar para que valores de $\alpha\ y\ \beta$ la matriz A tiene inversa

b) Calcular **A^3**

c) Hallar la matriz inversa de **B**

$a)$

$$Como\ |A|=\begin{vmatrix}0&\alpha&\beta\\0&0&\alpha\\0&0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\nexists\forall\alpha,\beta\in\Re$$

No hay ningún valor de α y β que haga a la matriz A invertible

$b)$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\0&0&\alpha\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\0&0&\alpha\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\alpha^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=AA^2=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\0&0&\alpha\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&\alpha^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

c

$$|B|=\begin{vmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot\left(adj\ B^t\right)\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\t&k&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ B^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\k&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}k&0\\t&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}k&1\\t&k\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\k&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\t&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\t&k\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\k&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\k&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

B.2. Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:

I) El perímetro del primero de ellos es triple del perímetro del tercero
II) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos
III) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible

Sea **a** el lado del primero, **b** del segundo y **c** del tercero

$$\begin{cases} 4a = 3.4b \Rightarrow a = 3b \\ 4a + 4b + 4c = 1664 \Rightarrow 4(a+b+c) = 1664 \Rightarrow a+b+c = 416 \Rightarrow 3b + b + c = 416 \Rightarrow c = 416 - 4b \Rightarrow \\ S = a^2 + b^2 + c^2 = (3b)^2 + b^2 + (416-4b)^2 = 10b^2 + 173506 + 16b^2 - 3328b \end{cases}$$

$$S = 26b^2 - 3328b + 173506 \Rightarrow S' = \frac{dS}{db} = 52b - 3328 \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 52b - 3328 = 0 \Rightarrow b = \frac{3328}{52} = 64\ m$$

$$S'' = \frac{d^2S}{db^2} = 52 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} b = 64\ m \\ a = 3.64 = 192\ m \\ c = 416 - 4.64 = 160\ m \end{cases}$$

B.3.-a) Utilizando el cambio de variable **t = ln x,** calcular $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(4-\ln x)}$

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(4x)\,sen\,(5x)}{(x-x^2)^2}$

$a)$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(4-\ln x)} = \int_1^2 \frac{1}{4-t}\,dt = -\int_3^2 \frac{du}{u} = -[\ln u]_3^2 = -(\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = e^2 \Rightarrow t = \ln e^2 = 2.\ln e = 2.1 = 2 \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 - t = u \Rightarrow dt = -du \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow u = 2 \\ t = 1 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

b

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(4x)\,sen\,(5x)}{(x-x^2)^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(4x)\,sen\,(5x) + 5\cos(5x)\,sen\,(4x)}{2(x-x^2)(1-2x)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-16sen\,(4x)\,sen\,(5x) + 20\cos(5x)\cos(4x) - 25sen\,(5x)\,sen\,(4x) + 20\cos(5x)\cos(4x)}{2\left[(1-2x)^2 - 2(x-x^2)\right]}$$

Problema B2 (Continuación)

$c)$*Continuación*

Asíntotas oblicuas $(Continuación)$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{(x+2)^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{(-x+1)(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1-0+0}{1-0} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}-x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4-(x^2-x)}{-x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4-x^2+x}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+4}{-x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3+\frac{4}{x}}{-1+\frac{1}{x}} = \frac{-3+0}{-1+0} = 3$$

Asíntota obicua $\Rightarrow y = x+3$ *cuando* $x \to -\infty$

B.3.-

a) Calcular $\int_{\ln e}^{e} |\ln x|\, dx$

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen\,(4x)\, sen\,(5x)}{\left(x-x^2\right)^2}$

$a)$

$\ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 \Rightarrow x > 1$

$$\int_1^e |\ln x|\, dx = \int_1^e \ln x\, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = (e \ln e - 1 \ln 1) - \int dx = (e\,.1 - 1.0) - [x\,]_1^e = e - (e-1) = 1$$

$$\begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(4x)\, sen\,(5x)}{\left(x-x^2\right)^2} = \frac{sen\,(4.0)\, sen\,(5.0)}{\left(0-0^2\right)^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(4x)\, sen\,(5x) + 5\cos(5x)\, sen\,(4x)}{2\left(x-x^2\right)\cdot(1-2x)} = \frac{4\cos(4.0)\, sen\,(5.0) + 5\cos(5.0)\, sen\,(4.0)}{2\left(0-0^2\right)\cdot(1-2.0)} =$$

$$= \frac{4.1.0 + 5.1.0}{2.0.1} == \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-16 sen\,(4x)\, sen\,(5x) + 20\cos(4x)\cos(5x) - 25 sen\,(5x)\, sen\,(4x) + 20\cos(5x)\cos(4x)}{2\cdot\left[(1-2x)^2 - 2\left(x-x^2\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-41 sen\,(4x)\, sen\,(5x) + 40\cos(4x)\cos(5x)}{2\cdot\left[(1-2x)^2 - 2\left(x-x^2\right)\right]} = \frac{-41 sen\,(4.0)\, sen\,(5.0) + 40\cos(4.0)\cos(5.0)}{2\cdot\left[(1-2.0)^2 - 2\left(0-0^2\right)\right]} =$$

$$= \frac{-41.0.0 + 40.1.1}{2\cdot\left[(1-0)^2 - 2.0\right]} = \frac{40}{2} = 20$$

B.4.- Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$ y el punto **P(1 , 2 , 3)**

a) Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta **r** y contiene el punto **P**.

b) Estudiar para que valores de **k** los vectores $\left\{ \left(1 , -2 , -\frac{1}{2} \right) , (0 , k , 0) , (0 , 0 , 2k) \right\}$ son linealmente independientes

a) El vector director de la recta es el del plano pedido que es perpendicular al vector formado por el punto **P** y el genérico **G** del plano, por lo tanto su producto escalar (que es la ecuación pedida es nulo)

$$y = 4 - 2z \Rightarrow x + 2(4 - 2z) = 7 \Rightarrow x - 4z = -1 \Rightarrow x = -1 + 4z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4 , -2 , 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x , y , z) - (1 , 2 , 3) = (x - 1 , y - 2 , z - 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} . \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(4 , -2 , 1) \cdot (x - 1 , y - 2 , z - 3) = 0 \Rightarrow 4(x - 1) - 2(y - 2) + z - 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 2y + z - 3 = 0$$

b) Son independientes siempre que no sean coplanarios, por lo tanto cuando el determinante que forman sea distinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2k^2 = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$$

$$Linealmente\ independientes \Rightarrow \forall k \in \Re - \{0\}$$

Aunque para k = 0 nos da dos vectores nulos lo que anularía el estudio, por lo tanto para $\forall k \in \Re$